



**56. TAKMIČENJE MLADIH
MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA**

Prirodno-matematički fakultet
Odsjek za matematiku
Sarajevo, 23.04.2016. godine

Program takmičenja

10:15 – 10:40	registracija takmičara
10:40 – 11:00	svečano otvaranje takmičenja i obraćanje učesnicima u amfiteatru Mladen Dežalić raspodjela takmičara po učionicama
11:00 – 14:30	izrada zadataka
11:30 – 12:15	predavanje za profesore pratioce Prof.dr. Šefket Arslanagić, učionica 428/IV
14:30 – 17:30	pregledanje radova
17:30 – 18:00	preliminarni rezultati i žalbe
18:30	proglašenje pobjednika i učenika koji su se plasirali na Matematičku olimpijadu Bosne i Hercegovine





56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA
BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH
ŠKOLA

Sarajevo, 23.04.2016. godine





56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 23.04.2016. godine

PRVI RAZRED

Zadatak 1

Naći najmanju brojnu vrijednost izraza:

$$A = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + x^3 + \frac{1}{x^3}}$$

za realne brojeve $x > 0$.

Zadatak 2

Neka je ABC jednakokraki trougao i $\sphericalangle BAC = 100^\circ$. Neka je D presječna tačka simetrale ugla $\sphericalangle ABC$ i stranice AC , dokazati da je $\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{BC}$.

Zadatak 3

Dato je devet pravih takvih da svaka od njih siječe dati kvadrat $ABCD$ na dva trapeza, čije se površine odnose kao 2:3. Dokazati da bar tri prave, od datih devet, prolaze istom tačkom.

Zadatak 4

Neka su a i b različiti prirodni brojevi, veći od 10^6 , sa osobinom da je broj $(a + b)^3$ djeljiv brojem ab . Dokazati da je $|a - b| > 10^4$.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 23.04.2016. godine

DRUGI RAZRED

Zadatak 1

Ako je $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ za sve $x \in [-1, 1]$, dokazati da je tada:

- a) $|c| \leq 1$,
- b) $|a + c| \leq 1$,
- c) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$.

Zadatak 2

Neka su a i b cijeli brojevi takvi da $2ab$ dijeli $a^2 + b^2 - a$. Dokazati da je a kvadrat prirodnog broja.

Zadatak 3

Duž AB je prečnik polukružnice h . Na ovoj polukružnici nalazi se tačka C , različita od tačaka A i B . Podnožje normale iz tačke C na duž AB je D . Kružnica k nalazi se izvan trougla ADC i dodiruje istovremeno polukružnicu h i duži AB i CD . Dodirište kružnice k sa duži AB je tačka E , sa polukružnicom h je tačka T , a sa duži CD je tačka S .

- a) Dokazati da su tačke A , S i T kolinearne.
- b) Dokazati da su duži AC i AE jednake dužine.

Zadatak 4

Neka je A skup 65 cijelih brojeva koji daju različite ostatke pri dijeljenju sa 2016. Dokazati da postoji podskup $B = \{a, b, c, d\}$ skupa A za koji vrijedi da je

$$a + b - c - d$$

djeljivo sa 2016.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 23.04.2016. godine

TREĆI RAZRED

Zadatak 1

Neka su a i b realni brojevi veći od 1. Odrediti najveću vrijednost $c \in \mathbb{R}$ za koju je zadovoljena nejednakost

$$\frac{1}{3 + \log_a b} + \frac{1}{3 + \log_b a} \geq c$$

Zadatak 2

Da li postoji pravougli trougao, čije su dužine kateta prirodni brojevi, a čija hipotenuza ima dužinu 2016^{2017} ? Odgovor detaljno obrazložiti.

Zadatak 3

Neka su h_a, h_b, h_c visine, t_a, t_b, t_c težišnice oštroglog trougla, spuštene na stranice a, b, c redom, r poluprečnik upisane, R poluprečnik opisane kružnice tog trougla. Dokazati da vrijedi $\frac{t_a}{h_a} + \frac{t_b}{h_b} + \frac{t_c}{h_c} \leq 1 + \frac{R}{r}$. Kad se dostiže jednakost?

Zadatak 4

Data je kružnica s centrom u koordinatnom početku poluprečnika 2016. Na kružnici i unutar nje odabrano je 540 tačaka s cjelobrojnim koordinatama od kojih nikoje tri ne leže na istoj pravoj. Dokazati da postoje dva trougla s vrhovima u datim tačkama koji imaju iste površine.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 23.04.2016. godine

ČETVRTI RAZRED

Zadatak 1

Neka je $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n}$ za $n \geq 1$. Dokazati da je:

a) $n \leq a_n^2 < n + \sqrt[3]{n}$,

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{n}) = 0$.

Zadatak 2

Odredi sve elemente $n \in A = \{2, 3, \dots, 2016\} \subset \mathbb{N}$ sa sljedećom osobinom: svaki broj $m \in A$ koji je manji od n , i relativno prost sa njim, mora biti prost.

Zadatak 3

Kružnica poluprečnika R_1 je upisana u oštri ugao α . Druga kružnica poluprečnika R_2 dodiruje jedan od krakova ugla α u istoj tački kao prva kružnica i siječe drugi krak tog ugla u tačkama A i B , a pri tome centri obje kružnice leže unutar ugla α . Dokazati da je:

$$\overline{AB} = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{(R_2 - R_1) \left(R_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + R_2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}$$

Zadatak 4

Odrediti sve funkcije $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju uslove:

a) $f(1) + 2 > 0$,

b) $f(x+y) - xf(y) - yf(x) = f(x)f(y) + f(x) + f(y) + xy$, za $\forall x, y \in \mathbb{Q}$,

c) $f(x) = 3f(x+1) + 2x + 5$, za $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



Rješenja

PRVI RAZRED

Zadatak 1

I način

Kako je $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 = x^6 + \frac{1}{x^6} + 6\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 20$

Dati se izraz može pojednostaviti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} A &= \frac{6\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 18}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \frac{6\left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}\right) + 15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6}{\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right)\right)} \\ &= \frac{6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6}{\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right)} \\ &= \frac{6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6}{\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right)} \\ &= \frac{6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right)} \end{aligned}$$

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



$$\begin{aligned} &= \frac{\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right)\left(6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right)} \\ &= \frac{3\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right)\left(2x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right)} \\ &= \frac{3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}{x + \frac{1}{x}} \\ &= 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Budući da je $x + \frac{1}{x} \geq 2$, za $x > 0$, zaključujemo da je $\min A = 6$ za $x = \frac{1}{x}$, tj. za $x = 1$.

II način

Uvedemo smjenu $x + \frac{1}{x} = t$. Tada je

$$\begin{aligned} A &= \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + x^3 + \frac{1}{x^3}} \\ x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = t^3 - 3t \\ x^6 + \frac{1}{x^6} &= \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 - 2 = (t^3 - 3t)^2 - 2 = t^6 - 6t^4 + 9t^2 - 2 \end{aligned}$$

Sada je:

$$A = \frac{t^6 - (t^6 - 6t^4 + 9t^2 - 2) - 2}{t^3 + t^3 - 3t} = \frac{6t^4 - 9t^2}{2t^3 - 3t} = 3t = 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 3 \cdot 2$$

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

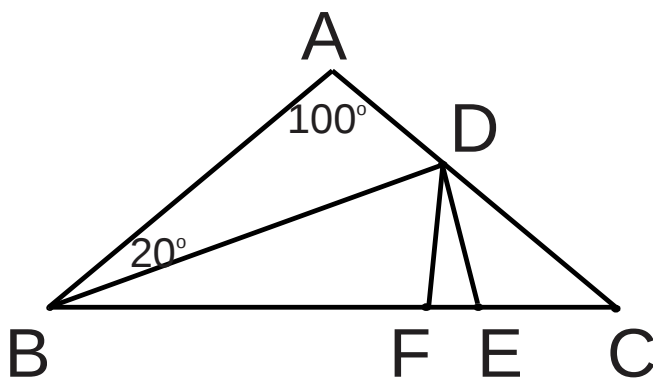
Sretno!



Dakle, $A \geq 6$, za $x = 1$.

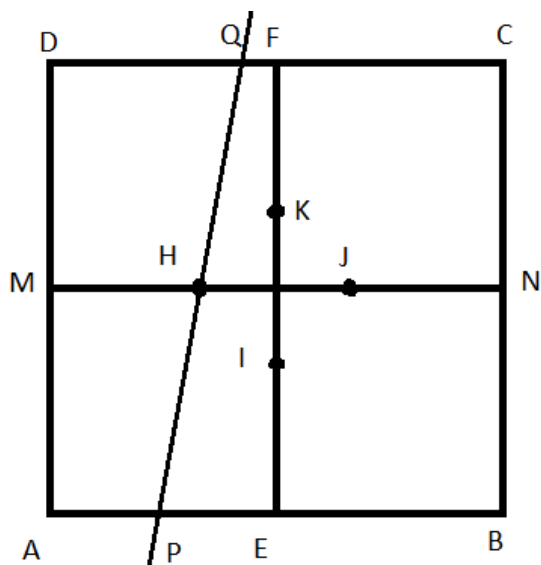
Zadatak 2

Neka je E tačka na BC takva da je $BE = BD$. Tada je trougao BED jednakokraki sa uglom između krakova od 20° . Tada su uglovi na osnovici 80° . Ugao $\angle BED$ je vanjski ugao trougla ECD , pa je $80^\circ = \angle BED = \angle ECD + \angle CDE$. Odavdje je $\angle CDE = 40^\circ$, jer je $\angle ECD = 40^\circ$. To znači da je trougao ECD jednakokraki, pa je $DE = EC$. Neka je F tačka na BC takva da je $BF = BA$. Tada su trouglovi ABD i FBD podudarni (pravilo *SUS*). Odavdje slijedi $\angle BDF = \angle BDA = 60^\circ$ i $AD = DF$. No, tada je $\angle FDC = 60^\circ$. S druge strane je $\angle CFD$ vanjski ugao trougla BFD , pa je $\angle CFD = 80^\circ$. Prema tome, trougao CDF je jednakokrak, pa je $AD = DF = DE = EC$. Zbog toga je $BD + AD = BE + EC = BC$.



Zadatak 3

Neka je dati kvadrat $ABCD$. Jasno je da svaka od ovih pravih siječe po dvije naspramne stranice kvadrata. Neka je a jedna od tih 9 pravih i neka ona dijeli kvadrat na dva trapeza čije se površine odnose 2:3. Neka ta prava siječe stranice AB i CD redom u tačkama P i Q . Ona dijeli kvadrat na trapeze $APQD$ i $PBCQ$. Oba ova trapeza imaju iste visine, pa se njihove površine odnose kao dužine odgovarajućih srednjih linija.



Neka su M i N sredine stranica AD i BC redom. Neka prava a siječe duž MN u tački

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



H . Tada je H sredina duži PQ . Tada MH i HN srednje linije trapeza $APQD$ i $PBCQ$. Kako se površine odnose 2:3, to je $MH:HN=2:3$. Neka je J tačka simetrična tački H u odnosu na centar kvadrata. Tada svaka prava koja prolazi tačkom J i dijeli kvadrat na 2 trapeza ima osobinu da se površine ta dva trapeza odnose kao 2:3. Analogno se zaključuje da postoje još dvije tačke sa traženom osobinom (sa slike su to tačke I i K). Prema tome, svaka od ovih devet pravih prolazi jednom od 4 tačke: H, I, J i K . Dirichletovim principom zaključujemo da će bar kroz jednu od njih proći bar tri prave.

Zadatak 4

Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je $a > b$. Neka je $k = (a, b)$ najmanji zajednički djelilac brojeva a i b . Tada je $a = km$ i $b = kn$, pri čemu su m i n relativno prosti prirodni brojevi i $m > n$. Očito je

$$|a - b| = a - b = k(m - n) \geq k.$$

Dokazat ćemo da je $k > 10000$. Pretpostavimo da je $k \leq 10000$. Tada je $m > n > 100$. Iz činjenice da $ab|(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ slijedi da $ab|a^3 + b^3$, tj. $k^2mn|k^3(m^3 + n^3) \Rightarrow mn|k(m^3 + n^3)$. Pošto su m i n relativno prosti, ovo je moguće samo ako $m|k$ i $n|k$, tj. $mn|k$. S druge strane imamo da je $mn > 10000 \geq k \Rightarrow mn > k$. Time smo dobili kontradikciju, pa je zato $k > 10000 \Rightarrow |a - b| > 10000$.



DRUGI RAZRED

Zadatak 1

Za $x = 0$ je $|c| \leq 1$, dok za $x = 1$ i $x = -1$ imamo

$$|a + b + c| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a + b + c \leq 1 \quad (1)$$

$$|a - b + c| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a - b + c \leq 1 \quad (2)$$

Sabiranjem (1) i (2) dobije se

$$-2 \leq 2(a + c) \leq 2 \Leftrightarrow |a + c| \leq 1.$$

Odavde je

$$-1 \leq a + c \leq 1 \Leftrightarrow -1 - c \leq a \leq 1 - c.$$

Kako je $|c| \leq 1$, odavde slijedi da je $|a| \leq 2$, pa je $|ac| \leq 2$, što implicira da je

$$-2ac \leq 4. \quad (3)$$

Kvadriranjem nejednakosti (1) i (2) dobijamo nejednakosti

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \leq 1 \text{ i } a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac \leq 1$$

Saberemo li ove dvije nejednakosti, dobit ćemo $2(a^2 + b^2 + c^2) + 4ac \leq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 - 2ac \leq 1 + 4 = 5$, na osnovu relacije (3).

Zadatak 2

Neka je $a^2 + b^2 - a = 2abq$. Odavde je $b^2 - 2abq + a^2 - a = 0$. Posmatrajmo kvadratnu jednačinu:

$$x^2 - 2aqx + a^2 - a = 0.$$

Ova jednačina ima jedno rješenje b . Dakle, ona ima rješenje u skupu cijelih brojeva pa je njena diskriminanta potpun kvadrat. Dakle, $D = 4a^2q^2 - 4(a^2 - a) = 4(a^2q^2 - a^2 + a)$. Kako je D potpun kvadrat, to je $a^2q^2 - a^2 + a = A^2$ gdje je A cio broj. Odavde imamo

$$a(a(q^2 - 1) + 1) = A^2.$$

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

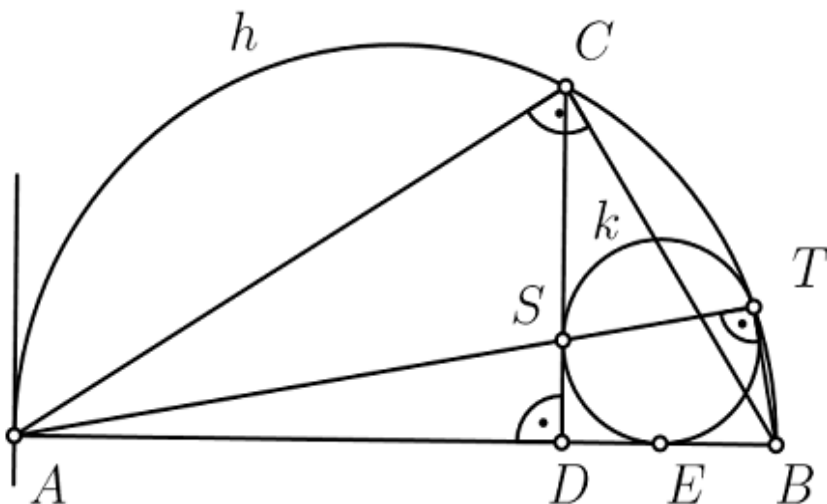
Sretno!



Tada je $a = du^2$, $a(q^2 - 1) + 1 = dv^2$, gdje je $d = \text{nzd}(a, a(q^2 - 1) + 1) = 1$. Dakle $a = 1 \cdot u^2 = u^2$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 3

- a) Homotetija s centrom u tački T koja kružnicu polukružnice h preslikava na polukružnicu k , preslikava tačku A u tačku S' koja leži na kružnici k . Kako homotetija čuva uglove, to je tangenta na k u S' paralelna tangenti na polukružnicu h u tački A , pa je okomita na AB . Dakle, tangenta u S' je zapravo kolinearna sa CD , što znači da se tačke S i S' podudaraju, čime smo dokazali da su A, S i T kolinearne tačke.
- b) U trouglu ABC koji je pravougli vrijedi $AC^2 = AD \cdot AB$. Na osnovu potencije tačke u odnosu na kružnicu imamo $AE^2 = AS \cdot AT$. Trouglovi ADS i ATB su slični, kao pravougli trouglovi sa jednim zajedničkim uglom, pa je $AS : AD = AB : AT$, odnosno $AD \cdot AB = AS \cdot AT$, odakle odmah zaključujemo da je $AC^2 = AE^2$, čime je tvrdnja dokazana.



Zadatak 4

Dovoljno je pokazati da postoje dva dvoelementna podskupa $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$ skupa A sa (svim) različitim elementima za koje vrijedi $a + b \equiv c + d \pmod{2016}$. Stoga ćemo posmatrati familiju svih dvoelementnih podskupova skupa A . Ovih skupova ima ukupno $\frac{(65 \cdot 64)}{2} = 2080$. Za svaka dva skupa koja imaju tačno jedan isti element, sume njihovih elemenata su kongruentne različitim brojevima po

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



modulu 2016. Prema tome, ne mogu postojati dva dvoelementna podskupa skupa A sa osobinom da su sume njihovih elemenata kongruentne istom broju po modulu 2016 i koji imaju tačno jedan element isti. Dakle, ako za dvočlane podskupove $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$ vrijedi $a + b \equiv (c + d) \pmod{2016}$, elementi a, b, c i d skupa A moraju biti različiti.

Obzirom da je ukupan broj dvoelementnih podskupova od A jednak $2080 > 2016$, po Dirichletovom principu postoje dva skupa sa osobinom da su sume njihovih elemenata kongruentne istom broju po modulu 2016.



TREĆI RAZRED

Zadatak 1

Stavimo $w = \frac{1}{3+\log_a b} + \frac{1}{3+\log_b a}$ i $x = \log_a b$. Tada je $\log_b a = \frac{1}{x}$. Sada je $x > 0$ i

$$w = \frac{1}{3+x} + \frac{x}{1+3x} = \frac{x^2+6x+1}{(3+x)(1+3x)} = \frac{8x+\frac{1}{3}(3+x)(1+3x)}{(3+x)(1+3x)} = \frac{8x}{(3+x)(1+3x)} + \frac{1}{3} > \frac{1}{3}$$

za sve $x > 0$.

Za dovoljno veliko x , ili x dovoljno blizu 0, izraz $\frac{8x}{(3+x)(1+3x)}$ se može učiniti po volji malim, ali uvijek je pozitivan. Dakle, najveća moguća vrijednost od c je $\frac{1}{3}$.

Zadatak 2

Pretpostavimo da takav trougao postoji, tj da postoje prirodni brojevi a i b , takvi da je:

$$a^2 + b^2 = (2016^{2017})^2$$

Kako je $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, to imamo da je:

$$a^2 + b^2 = 2^{20170} \cdot 3^{8068} \cdot 7^{4034}$$

odakle slijedi da su a i b parni. To znači su obje strane jednakosti djeljive sa 4^n . Kako je $2^{20170} = 4^{10085}$, to a i b moraju biti oblika:

$$\begin{aligned} a &= 2^{10085} \cdot m \\ b &= 2^{10085} \cdot n \end{aligned}$$

Sada prethodna jednakost postaje:

$$m^2 + n^2 = 3^{8068} \cdot 7^{4034}$$

Vidimo da 3 dijeli $m^2 + n^2$, pa se lahko zaključi da m i n moraju biti djeljivi sa 3. Odavdje dobijamo da mora biti:

$$\begin{aligned} m &= 3^{4034} \cdot u \\ n &= 3^{4034} \cdot v \end{aligned}$$

Sada dobijamo da je

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



$$u^2 + v^2 = 7^{4034}$$

Analogno zaključujemo da su u i v takođe djeljivi sa 7, pa su oblika:

$$\begin{aligned} u &= 7^{2017} \cdot s \\ v &= 7^{2017} \cdot t \end{aligned}$$

pa je

$$s^2 + t^2 = 1$$

što je nemoguće za s i t prirodne brojeve. Dakle, trougao sa traženim svojstvom ne postoji.

Zadatak 3

Pomnožimo obje strane nejednakosti sa P (površinom trougla).

Koristeći:

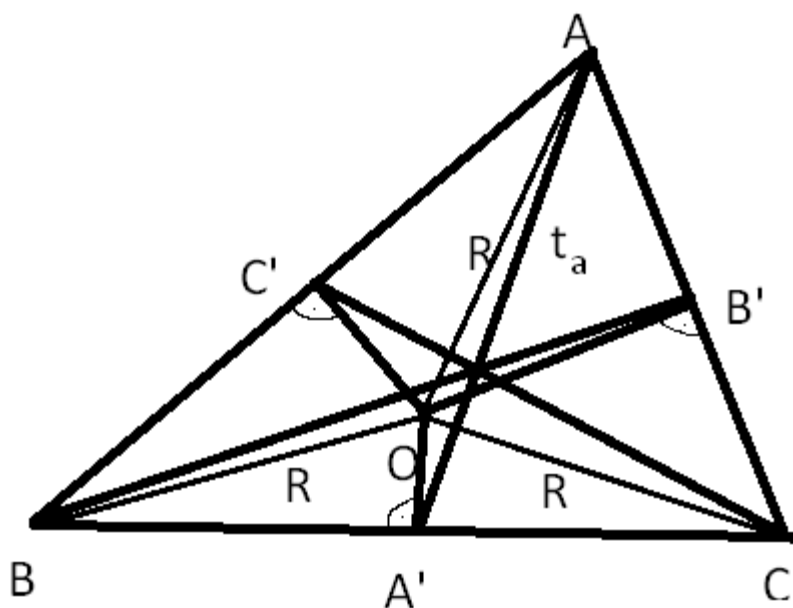
$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} (= r \cdot s) = r \cdot \frac{a + b + c}{2}$$

dobijamo nejednakost:

$$\frac{a \cdot t_a}{2} + \frac{b \cdot t_b}{2} + \frac{c \cdot t_c}{2} \leq P + R \cdot \frac{a + b + c}{2}$$

ili

$$\frac{(t_a - R) \cdot a}{2} + \frac{(t_b - R) \cdot b}{2} + \frac{(t_c - R) \cdot c}{2} \leq P$$



Uočimo da je u trouglu AOA' :

$$AO + OA' \geq AA', \text{ tj. } t_a - R \leq OA'$$

Analogno je i $t_b - R \leq OB'$ i $t_c - R \leq OC'$.

Dakle, sada je:

$$\frac{(t_a - R) \cdot a}{2} + \frac{(t_b - R) \cdot b}{2} + \frac{(t_c - R) \cdot c}{2} \leq \frac{OA' \cdot a}{2} + \frac{OB' \cdot b}{2} + \frac{OC' \cdot c}{2} = P$$

što je i trebalo pokazati.

Jednakost se postiže kada je $t_a - R = OA'$, $t_b - R = OB'$ i $t_c - R = OC'$, odnosno kada je trougao ABC jednakokraničan.

Zadatak 4

Pretpostavimo suprotno, tj. da svi trouglovi imaju različitu površinu. Ukupno takvih trouglova imamo $\binom{540}{3} = \frac{540 \cdot 539 \cdot 538}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 26\,098\,380$.

Obzirom da je površina trougla ABC data formulom:

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



$$P = \frac{1}{2} \cdot |A_x \cdot (B_y - C_y) + B_x \cdot (C_y - A_y) + C_x \cdot (A_y - B_y)|$$

to je površina trougla prirodan broj podijeljen sa 2.

Dakle, kako trouglova ima 26098380, najveća površina će biti veća od $\frac{26098380}{2} = 13\,049\,190$.

Površina kruga je $2016^2 \cdot \pi < 2016^2 \cdot 3,2 = 13\,005\,619,2 < 13\,049\,190$.

To znači, da najveći trougao ne bi mogao biti upisan u krug, pa moraju postojati bar 2 trougla sa istom površinom.



ČETVRTI RAZRED

Zadatak 1

a) Kako vrijedi $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n}$, to kvadriranjem posljednje jednakosti dobijamo da vrijedi

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2a_n \frac{1}{2a_n} + \frac{1}{4a_n^2} > a_n^2 + 1$$

Koristeći posljednju nejednakost, matematičkom indukcijom se lahko pokaže da je $a_n^2 \geq n$.

Drugi dio ćemo, takođe, dokazati koristeći princip matematičke indukcije. Očigledno je $a_1^2 = 1 < 1 + \sqrt[3]{1}$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n . Za $n + 1$ ćemo imati:

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 1 + \frac{1}{4a_n^2}$$

Sada zbog pretpostavke indukcije je

$$a_{n+1}^2 < n + \sqrt[3]{n} + 1 + \frac{1}{4a_n^2}$$

a kako je $a_n^2 \geq n$, to je

$$a_{n+1}^2 < n + 1 + \sqrt[3]{n} + \frac{1}{4n}$$

pa je sad dovoljno dokazati još da je

$$\sqrt[3]{n} + \frac{1}{4n} < \sqrt[3]{n+1}$$

$$\frac{1}{4n} < \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}} < 4n$$

Trajanje izrade zadatka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



$$\frac{n+1-n}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}} < 4n$$

$$\frac{\sqrt[3]{n+1}^3 - \sqrt[3]{n}^3}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}} < 4n$$

$$\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{(n+1)^2} < 4n$$

Nakon dijeljenja posljednje nejednakosti sa $\sqrt[3]{n^2}$, dobijamo:

$$1 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} < 4\sqrt[3]{n}$$

Što je tačno jer je $1 + \frac{1}{n} < 2$ i $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} < 4 \leq 4\sqrt[3]{n}$.

b) Tvrdnja slijedi primjenom teorema o uklještenju.

Zadatak 2

Označimo sa M traženi skup. Neka je $n \in M$. Ako je $p^2 < n$ za neki prost p , tada p mora dijeliti n . Naime, ako bi n i p bili relativno prosti, tada bi, p^2 zbog $n \in M$ bio prost broj. Dakle, $n \in M$ i $n > p^2$ povlači da p dijeli n .

Kako je $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310 > 2016$ to brojevi iz M ne mogu biti veći od $11^2 = 121$.

Ako je $n \in M$ i $49 < n \leq 121$, tada je n djeljivo sa 2, 3, 5 i 7, što je nemoguće zbog $n \leq 121$. Dakle, za $n \in M$ vrijedi $n \leq 49$.

Ako je $n \in M$ i $25 < n \leq 49$, tada je n djeljivo sa 2, 3 i 5, odakle zaključujemo da je $n = 30$.

Ako je $n \in M$ i $9 < n \leq 25$, tada je n djeljivo sa 2 i 3, što nam daje da $n \in \{12, 18, 24\}$.

Konačno, za $n \in M$ i $4 < n \leq 9$ n mora biti djeljivo sa 2, što nam daje $n \in \{6, 8\}$.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

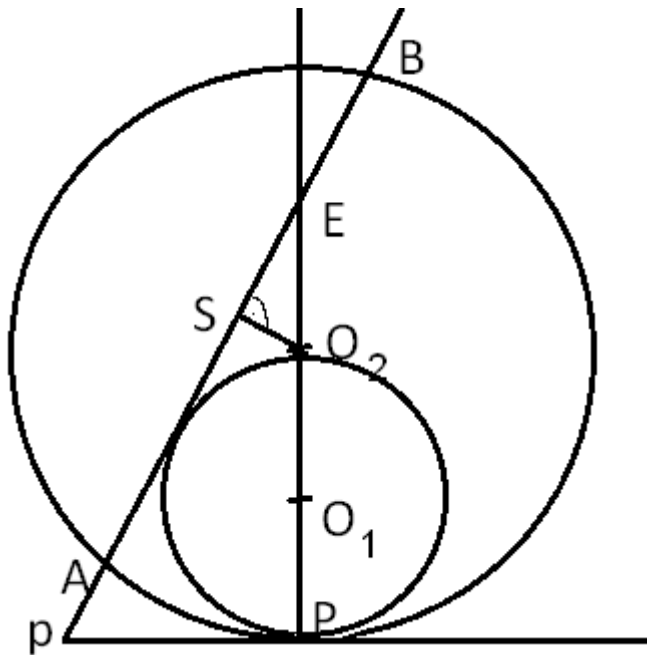
Sretno!



Kako su 2, 3 i 4 očigledno iz M , to je $M = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30\}$.

Zadatak 3

1. Neka su O_1 i O_2 centri prvog, odnosno drugog kruga, tačka P neka je vrh datog ugla (tj. $\angle APD = \alpha$), D dodirna tačka prvog i drugog kruga, E presjek pravih O_1O_2 i AB , a S središte duži $\overline{AB}$.



Očito je $\angle SO_2E = \alpha$ kao uglovi sa okomitim kracima, pa je $\overline{O_2S} = \overline{O_2E} \cos \alpha$ (1)

Pošto tačka O_1 leži na simetrali $\angle APD$ imamo da je $\overline{PD} = R_1 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ (2)

$$\text{U trouglu EPD je } \overline{DE} = \overline{PD} \operatorname{tg} \alpha = R_1 \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{2R_1}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2R_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} \quad (3)$$

$$\text{Iz (3) sledi: } \overline{O_2E} = \overline{DE} - \overline{O_2D} = \frac{2R_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} - R_2 = \frac{2R_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - R_2 \cos \alpha}{\cos \alpha}, \text{ pa onda}$$

$$\text{zbog (1): } \overline{O_2S} = \overline{O_2E} \cos \alpha = 2R_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - R_2 \cos \alpha \quad (4)$$

U pravougloj trouglu AO_2S zaključujemo:

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.

Sretno!



$$\overline{AS}^2 = \overline{AO_2}^2 - \overline{O_2S}^2 \Rightarrow \frac{1}{4}\overline{AB}^2 = R_2^2 - \overline{O_2S}^2 \stackrel{(4)}{=} R_2^2 - \left(2R_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - R_2 \cos \alpha\right)^2 = \dots$$

Poslije sređivanja dobijamo:

$$\overline{AB} = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{(R_2 - R_1) \left(R_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + R_2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

Zadatak 4

Posmatrajmo funkciju $g(x) = f(x) + x + 1$, odnosno imamo da je $f(x) = g(x) - x - 1$. Sada dati uslovi postaju:

a) $g(1) > 0$

b) $g(x + y) = g(x) \cdot g(y)$, za sve $x, y \in \mathbb{Q}$

c) $g(x + 1) = \frac{1}{3}g(x)$, za sve $x \in \mathbb{Q}$

Iz uslova b) za $x = 0, y = 1$, imamo zbog a) da je:

$$g(1) = g(0) \cdot g(1) \Rightarrow g(0) = 1.$$

Dalje, iz uslova c) je $g(1) = \frac{1}{3}, g(2) = \frac{1}{3^2}, \dots$ pa indukcijom dokažemo da je $g(n) = 3^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Kako je, $1 = g(0) = g(x + (-x)) = g(x) \cdot g(-x)$, to je $g(-x) = 3^{-(-x)}$, pa je $g(n) = 3^{-n}, \forall n \in \mathbb{Z}$.

sada je $\frac{1}{3} = g(1) = g\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$, pa je $g\left(\frac{1}{n}\right) = 3^{-\frac{1}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Analogno je i $g\left(\frac{m}{n}\right) = g\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = 3^{-\frac{m}{n}}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Dakle, $f(x) = 3^{-x} - x - 1, \forall x \in \mathbb{Q}$.